Лекция № 2

Дискретті элементар оқиғалар кеңістігіндегі ықтималдық.

Айталық $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ дискретті элементар оқиғалар кеңістігі болсын.

Егер Ω -да анықталған, теріс емес және $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$ шартын қанағаттандыратын P сандық функциясы берілсе, онда біз *элементар оқиғалардың ықтималдықтары берілген дейміз* (кейде P функциясы Ω -да *ықтималдықтардың үлестірімін* береді деп те айтамыз).

Кез келген A оқиғасының $(A \subseteq \Omega)$ *ықтималдығы* деп мына санды айтамыз:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) \tag{1}$$

Бұл анықтама қисынды, өйткені (1) формуладағы оң жақтағы қатар (абсолютті) жинақталады.

Назар аудара кететін бір нәрсе, ол $P(\omega_1), P(\omega_2), \ldots$ сандары (анықтама бойынша) сәйкес $\omega_1, \omega_2, \ldots$ элементар оқиғаларының ықтималдықтары екендігі. Ендеше осы ықтималдықтарды іс жүзінде қалай анықтау керек деген сұрақ тууы заңды нәрсе. Негізінен алғанда, бұл сұрақ ықтималдықтар теориясының ауқымынан тыс жатқан сұрақ. Бұл, жалпылап айтсақ, жүргізілген тәжірибеге сәйкес келетін ықтималдық модельдерінің қайсысының іс жүзінде бағалы болатындығы туралы сұрақ. Бірақ, кәзірше біздің негізгі мақсатымыз, қандай да бір элементар ω оқиғасының ықтималдығы неге нақтылы $P(\omega)$ санына (мәселен $\frac{1}{3}$ санына) тең болатындығын дәлелдеу немесе негіздеу емес, біздің мақсатымыз элементар оқиғалардың ықтималдықтарын пайдалана отырып күрделі оқиғалардың ықтималдықтарын таба білу. Дегенмен, көп жағдайларда қайсібір элементар оқиғалардың ықтималдықтары неге тең болатындығы ешқандай дау туғызбайды. Мәселен, егер тәжірибе симметриялы тиынды бір рет лақтырудан тұрса, онда $P(Г) = P(Ц) = \frac{1}{2}$, ал ойын сүйегін бір рет лақтырудан тұрса, онда $P(1) = P(2) = \ldots = P(6) = \frac{1}{6}$. деп алу керек екендігі өзінен-өзі түсінікті. Егер де симметриялы тиын қашан "герб" түскенше лақтырылса (§ 1, 6-мысалды қараңыз), онда $P(\omega_n) = P(\underbrace{ЦЦ\ldots Ц}_{n-1}Г) = 2^{-n}$ деп алуға болады, себебі $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$. Мәселен, егер осы мысалда A деп тәжірибе аяқталу үшін тиынды тақ санды рет лақтыру керек деген оқиғаны белгілесек, онда

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(2n-1)} = \frac{2}{3}.$$

Егер A деп Ω -ның барлық ішкі жиындарының жиынын белгілесек, яғни $\mathsf{A} = \{A : A \subseteq \Omega\}$ барлық кездейсоқ оқиғалардың (§1 қараңыз) жиыны болса, онда жоғарыда енгізілген P функциясы кез келген $A \in \mathsf{A}$ үшін анықталған. Бұл функцияны бұдан былай қарай A-да анықталған *ықтималдық (ықтималдықтық функция)* деп атаймыз.

Анықтама. Ω дискретті элементар оқиғалар кеңістігі, A Ω -ның барлық ішкі жиындарының жиыны, P A-да анықталған ықтималдық болсын. Онда (Ω, A, P) үштігі *дискретті ықтималдық кеңістігі* деп аталады.

Егер Ω ақырлы жиын болса $\left(|\Omega| < \infty\right)$, онда дискретті ықтималдық кеңістігі *ақырлы ықтималдық кеңістігі* деп аталады.

Енді (1) қатардың абсолютті жинақталатынын пайдалана отырып жоғарыда келтірілген анықтамалардан шығатын ықтималдықтың кейбір қасиеттерін келтіре кетейік:

1). Кез келген $A \in \mathsf{A}$ оқиғасы үшін $P(A) \geq 0$

Бұл (1) формуладан шығатыны айдан-анық.

2). $P(\varnothing) = 0;\ P(\Omega) = 1.$

Себебі (1) формула және ықтималдықтық функцияның анықтамасы бойынша $P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$ және $P(\varnothing) = 0.$

3). $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$

Шынында да анықтама бойынша

$$P(A \cup B) = \sum_{\omega \in A \cup B} P(\omega) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) + \sum_{\omega \in B} P(\omega) - \sum_{\omega \in AB} P(\omega) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Бұдан мынау шығады: егер $AB = \varnothing$ болса, яғни A, B оқиғалары үйлеспейтін болса, онда

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

4). $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Себебі $A\overline{A} = \varnothing$ және $A + \overline{A} = \Omega$ болғандықтан 3-қасиет бойынша $P(A) + P(\overline{A}) = 1$. Егер қосарлылық принципін еске алсақ, біз осы қасиетті пайдаланып мынандай формулаларды жаза алатынымызды ескерте кетейік: кез келген $A_1, A_2, \ldots$ оқиғалары үшін

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_i \overline{A_i}\right), \quad P\left(\bigcap_i A_i\right) = 1 - P\left(\bigcup_i \overline{A_i}\right)$$

5). Егер $A_i \in \mathrm{A}$ және $A_i A_j = \varnothing (i \neq j)$ болса, онда

$$P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Бұл $P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ және $\lim_{n \to \infty} P(\sum_{i-n+1}^{\infty} A_i) = 0$ болатындығынан шығады.

6) Егер A оқиғасы B оқиғасын ілестіретін болса $(A \subseteq B)$, онда

$$P(A) \leq P(B).$$

Себебі $B = A \cup (B \setminus A)$ және 3-ші және 1-ші қасиеттер бойынша

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$$

7) Кез келген A, B оқиғалары үшін

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

Бұл 1-ші және 3-ші қасиеттерден шығады.

Соңғы қасиет, әрине, оқиғалардың кез келген саналымды қосындысы үшін де дұрыс

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Шындығында да, егер $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \overline{A}_1$, $B_3 = A_3 \overline{A}_2 \overline{A}_1, \ldots,$

$B_n = A_n \overline{A}_{n-1} \ldots \overline{A}_1, \ldots$ деп белгілесек, онда 6-қасиет бойынша $\mathrm{P}(B_n) \leq \mathrm{P}(A_n)$ және де $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$ болғандықтан 5,6-қасиеттер бойынша

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

8). $P(A \setminus B) = P(A) - P(AB)$.

Шынында да $A = (A \setminus B) + AB$ болғандықтан 3-қасиет бойынша

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(AB).$$

9). Кез келген $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиЄалары Їшін $(n < \infty)$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n) \quad (2)$$

Дәлелдеу үшін математикалық индукция әдісін қолданалық.
Егер $n = 2$ болса, онда 3-қасиет бойынша (2) формула дұрыс. Енді (2) формула кез келген $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ оқиғалары үшін дұрыс болсын делік те $B = \bigcup_{i-1}^{n-1} A_i$ деп алалық. Онда 3-қасиет бойынша

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i = P(B \cup A_n) = P(B) + P(A_n) - P(A_n B)$$

Бірақ ұйғарым бойынша біз $P(B) = P(\bigcup_{i-1}^{n-1} A_i)$ және $P(A_n B) = P(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_n A_i))$ ықтималдықтарын $n - 1$ оқиға үшін (2) формуланы пайдаланып жаза аламыз. Енді соңғы формулаға осы белгілі мәндерді қойсақ, онда (2) формула шығады.

Ықтималдықтар теориясында (2) формуланы *ықтималдықтарды қосу формуласы* деп атайды.

2.1 Ықтималдықтың классикалық анықтамасы

$(\Omega, \mathrm{A}\ , P)$ ақырлы ықтималдық кеңістігін қарастыралық және $\Omega = \{\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\ \}$ элементар оқиғалар кеңістігіндегі барлық элементар оқиғалар өзара тең ықтималдықты болсын деп есептелік: $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \ldots = P(\omega_n) = p$. Онда

$$1 = P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p = p \cdot |\Omega| = np\,.$$

Бұдан $p = \frac{1}{n}$ $\left(= \frac{1}{|\Omega|}\right)$ және кез келген $A \subseteq \mathrm{A}$ оқиғасы үшін

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = \sum_{\omega \in A} p = \frac{|A|}{n} \quad \left(= \frac{|A|}{|\Omega|}\right).$$

Ықтималдықты осылай анықтауды *ықтималдықтың классикалық анықтамасы* деп атайды.

Ықтималдықтың классикалық анықтамасына келтіретін ықтималдық кеңістігінің моделі тәжірибенің ерекшелігін анықтайтын шарттарға қарағанда барлық элементар оқиғалар бірдей жағдайда болатын, басқаша айтқанда олардың бір-бірінен ешқандай артықшылығы болмайтын кездерде, яғни осы айтылған мағынада барлық элементар оқиғалардың "симметриялық" қасиеті болатын кездерде қолданылады. Мәселен тиынды немесе ойын сүйегін ақырлы рет лақтыру нәтижесінде пайда болатын ықтималдықтық модельдердің осындай "симметриялық" қасиеті бар болатынын байқау қиын емес. Шындығында да тиынды бір рет лақтырғанда "Герб" не "Цифр" түсуінің бір-бірінің алдында ешқандай артықшылығы жоқ, сондықтан да олардың әрқайсысының ықтималдығы $\frac{1}{2}$ тең. Сол сияқты егер тиынды екі рет лақтырсақ онда дәл бір рет "Г" түсу ықтималдығы да $\frac{1}{2}$, ал ең болмағанда бір рет "Г" түсу ықтималдығы $\frac{3}{4}$ болған болар еді. Егер де тәжірибе ойын сүйегін бір рет лақтырудан тұрса, онда 1,2,...,6 нәтижелерінің әрқайсысының ықтималдығы $\frac{1}{6}$ тең, ал жұп ұпай түсу ықтималдығы $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, "3" -тен кем емес ұпай түсу ықтималдығы $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ болған болар еді. т.с.с.

Сонымен анықтамадан көрініп тұрғандай ақырлы ықтималдық кеңістігінде классикалық анықтама бойынша қандай да бір A оқиғасының ықтималдығын табу үшін біз A-оқиғасының пайда болуына әкеп соғатын элементар оқиғалардың ("қолайлы жағдайлардың") санын, яғни A-ны құрайтын элементар оқиғалар санын барлық элементар оқиғалар ("мүмкін болатын жағдайлар") санына бөлуіміз керек. Басқаша айтқанда, классикалық анықтама негізінде оқиғаның ықтималдығын табу үшін біз қандай да бір жиындардың элементтерінің санын (қуатын) таба білуіміз қажет екен. Соңғыларды санау әдетте комбинаторика әдістері арқылы іске асырылатынын ескере отырып біз қазір комбинаторикалық талдаудың негізгі ұғымдарына тоқталамыз және де сәйкес ықтималдықтық негіздерді дамытуға тырысамыз.